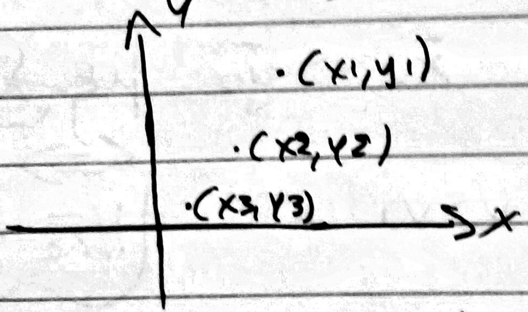
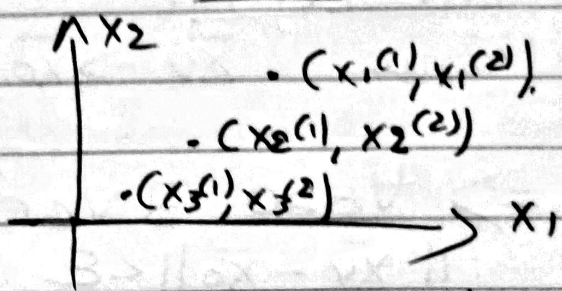
30/10/17

Ακολουθίες στο $\mathbb{R}^n$

<u>Ορισμός</u>: $\mathbb{N} \ni \nu \to \bar{x}_\nu = (\underset{\in\mathbb{R}}{x_\nu^{(1)}}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ ν-οστό διάνυσμα

$n=2$ $\qquad\qquad$ $n=2$





συμβολισμός: $(\bar{x}_\nu) = ((x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)})) \subset \mathbb{R}^n$

<u>Ορισμός</u>: $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$:\Leftrightarrow \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\in\mathbb{R}} \to 0 \quad (\nu\to\infty)$

ακολουθ. πραγματ. πάει στο 0 μηδενική ακ.

ε-δ ⇒ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0,\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu \geq \nu_0.\ \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon$

<u>και συμβολισμός</u> $\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$

ή $(x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)})$

<u>Παρατήρηση</u>:

$$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \Leftrightarrow \|(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) \overset{\text{ορ}}{-} \bar{0}\| \to 0 \underset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \bar{x}_\nu - \bar{x}_0 \to 0$$

[Συνέπεια: αν έχω κάποια υποψία (εικασία) ότι η ακολουθία $(\bar{x}_\nu)$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$, τότε για να αποδείξω ότι πράγματι συγκλίνει στο $\bar{x}_0$ ~~αφαιρώ~~ μπορώ να αφαιρέσω από τους όρους $\bar{x}_\nu$ της ακολουθίας το υποψήφιο όριο $\bar{x}_0$ και ν.δ.ο η ακολουθία των διαφορών ($x_\nu - x_0$) συγκλίνει στο $\bar{0}$] (δηλ. ότι η απόσταση των όρων από το όριο συγκλίνει στο 0)

Πρόταση:

Το όριο x_0 μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό (και συμβολίζεται με $\lim_{\nu\to\infty}\bar{x}_\nu$)

Απόδειξη:

Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\bar{x}_\nu \to \bar{y}_0$ με $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$ $\Longleftrightarrow$ $\|\bar{x}_0-\bar{y}_0\|>0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \nu_1\in\mathbb{N}_0\ \forall \nu\geq\nu_1$:

$: \|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists \nu_2\in\mathbb{N}_0\ \forall \nu\geq\nu_2: \|\bar{x}_\nu-\bar{y}_0\|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει ότι $\forall \nu\geq\max\{\nu_1,\nu_2\}$:

έχουμε $\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|<\varepsilon$ και ~~ταυτόχρονα~~

$\|\bar{x}_\nu-\bar{y}_0\|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ Ειδικότερα για $\varepsilon := \dfrac{\|\bar{x}_0-\bar{y}_0\|}{2}$ (>0)

ισχύει αυτό, δηλ. $\forall\nu\geq\max\{\nu_1,\nu_2\}$

$\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|<\dfrac{\|\bar{x}_0-\bar{y}_0\|}{2}$ και $\|\bar{x}_\nu-\bar{y}_0\|<\dfrac{\|\bar{x}_0-\bar{y}_0\|}{2}$

Που είναι άτοπο. $\Rightarrow$

Επειδή

$\|\bar{x}_0-\bar{y}_0\| \leq \|\bar{x}_0-\bar{x}_\nu\| + \|\bar{x}_\nu-\bar{y}_0\| < \|\bar{x}_0-\bar{y}_0\|$ $\square$

SOS. SOS. SOS

Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

για ε: 26

Απόδειξη:

ή 1

$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall \nu \ge \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < 26$

$\Rightarrow \forall \nu \ge \nu_0 : \|\bar{x}_\nu\| = \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \le \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| + \|\bar{x}_0\| <$

$< 26 + \|\bar{x}_0\|$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \|\bar{x}_\nu\| < 26 + \|\bar{x}_0\| + \sum_{\nu=1}^{\nu_0 - 1} \|\bar{x}_\nu\|$ □

Πρόταση: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $\bar{y}_\nu \to \bar{y}_0$, $a_\nu \to a_0$, $\beta_\nu \to \beta_0$

$\Rightarrow a_\nu \bar{x}_\nu + \beta_\nu \bar{y}_\nu \to a \bar{x}_0 + \beta \bar{y}_0$

Απόδειξη:

Θ.ν.δ.ο $\|a_\nu \bar{x}_\nu + \beta \bar{y}_\nu - a\bar{x}_0 - \beta \bar{y}_0\| \to 0$

$(\bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu, \bar{x}_0, \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n, a_\nu, \beta_\nu, a, \beta \in \mathbb{R})$

$0 \le \|a_\nu \bar{x}_\nu + \beta_\nu \bar{y}_\nu - a\bar{x}_0 - \beta \bar{y}_0\| \le \underbrace{|a_\nu|}_{\le c} \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\to 0} +$

$+ \underbrace{|a_\nu - a|}_{\to 0} \|\bar{x}_0\| + \underbrace{|\beta_\nu|}_{\le c \text{ φραγμ.}} \underbrace{\|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\|}_{\to 0} + \underbrace{|\beta_\nu - \beta| \, \|\bar{y}_0\|}_{\to 0}$

$\triangle \; a_\nu \bar{x}_\nu - a\bar{x}_0 = a_\nu(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) + (a_\nu - a)\bar{x}_0$.

άρα συγκλίνουσα $\to 0$ άρα και φραγμένη □

Η πιο χρήσιμη πρόταση για τον υπολογισμό ορίων ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$:

Πρόταση : Έστω $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$ μια ακολ. στον $\mathbb{R}^n$

και $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ ένα σημείο στον $\mathbb{R}^n$

Τότε $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \iff \forall i = 1, \dots, n : x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$

Απόδειξη:

Υπενθύμιση: $\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x^{(1)}|, \dots, |x^{(n)}|\} \leq$
$\leq \|\bar{x}\| \leq \sqrt{n}\, \|\bar{x}\|_\infty$

$\Rightarrow$: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \overset{\text{ορ}}{\iff} 0 \leq \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\in \mathbb{R}} \to 0 \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty \to 0 \Rightarrow$

$$\Big(\|\bar{x}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{1/2} \in \mathbb{R} \Big)$$

$(x_1, \dots, x_n)$
$\in \mathbb{R}$ $\quad \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty}_{\leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0} \to 0 \quad \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n :$$

$1, \dots, n : 0 \leq \underbrace{|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|}_{} \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$

$\Rightarrow \quad \to 0$

και $|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \to 0$

$\iff x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$

$\Leftarrow$: $\forall i=1,\dots,n: |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \to 0$

$\Leftrightarrow \forall i=1,\dots,n \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_i \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_i:$

$|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

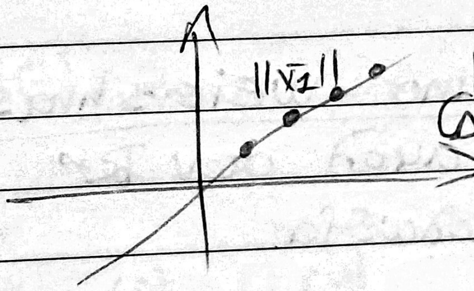
Δν ακολουθίας $\quad \sqrt{n} \to$ διάσταση αμετάβλητη

$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n: \forall \varepsilon>0 \quad \forall \nu \geq \nu_0 = \max\{\nu_1,\dots,\nu_n\}:$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|^2 < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|^2\right)^{1/2} = \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon$$

Ερμηνεία



$\|\bar{x}_\nu\| \to 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_\nu^{(1)})^2 + (x_\nu^{(2)})^2} \geq |x_\nu^{(i)}|$ D

$, i=1,2$

Ορισμός : Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu)$ λέγεται ακολουθία Cauchy αν $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu,\mu \geq \nu_0$:

$\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$

Πρόταση : (Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης) $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $(\bar{x}_\nu)$ είναι ακολουθία Cauchy.

$\boxed{\alpha} \Rightarrow$

Απόδειξη: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_0 \ \forall \nu \geq \nu_0 \quad \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| +$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \forall \nu,\mu \geq \nu_0$

$\|\bar{x}_0 - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$

β) $\Leftarrow$

$(\bar{x}_\nu)$ ακολουθία Cauchy

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n$

$(x_\nu^{(i)})_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

ακολουθία Cauchy

$\underset{\substack{\mathbb{R} \\ \text{πλήρης}}}{\Rightarrow} \exists\, x_0^{(i)} \in \mathbb{R} : x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\underset{\text{προηγ. πρ}}{\Rightarrow} \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$.

<u>Θεώρημα Bolzano - Weierstrass</u>

Κάθε φραγμένη ακολ. στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.